2015 年度線形代数 B（後クラス） 演習 No.2（線形写像と基底変換）ver.a

問題 2015BL-2-1

漸化式

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 5a_n \ \ (n = 1,2,3,\dots) \quad \text{式（イ）}$$

を満たす実数列$\langle a_n \rangle$（ただしnは正整数）全体の集合$\wp_0$は，$\mathbb{R}$上の線形空間Vを成す．この空間Vにおいて，１項ずらした数列を作るという線形写像$F：\langle a_n \rangle \to \langle a_{n+1} \rangle$を考える. ここで, 基底として, 第１項が 0, 第２項が 1 である数列 e_0 と，第１項が１で第２項が０である数列 e_1 を考える.

(1) この空間Vが線形空間であることを確かめよ.

(2) 漸化式（イ）を満たす任意の数列を，e_0とe_1の線形結合で表せることを示せ. このことから，e_0とe_1が空間Vの基底を成すことが確認できる.

(3) Fの表現行列Mを求めよ．導出過程で基底表現式を明記すること.

問題 2015BL-2-2

実関数を要素とする線形空間Vにおける線形変換Fとして, 実関数$f(t)$を$f(t+a)$に写像するものを取り上げる．ただし$\mathrm{a} \in \mathbb{R}$．今，関数$f(t)$に$\mathrm{k}, \mathrm{l} \in \mathbb{R}$として以下の形で与えられるものを考える.

$$f(t) \ = ke^{8t} + le^{17t}$$

基底を成す関数（ここでは線形空間Vの要素が実関数であることに注意）としてe^{8t}とe^{17t}の２つを用意する（この二つの要素は明らかに$f(t)$の一種であることにも注意).

(1) Fが本当に線形写像（線形変換）かどうか確認せよ.

(2) 線形変換Fの上述の基底に対する表現行列を求めよ.

※本問では写像を表す記号にFを用いていることに注意． fは線形空間Vの単なる要素である．このような記号表記の取り換えは書籍が違えばよく起きるので, 数学では一つ一つの記号の意味をよく確認しながら進むこと.

問題 2015BL-2-3

$\mathbb{R}^3$での線形変換fの，基底$\{\boldsymbol{a_i}\}$, $\{\boldsymbol{b_i}\}$に関する表現行列を求めよ．導出過程で基底

表現式を明記すること．（教科書 P90, 問題 4-1.5 の派生）

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3y - z \\ x + 2y \\ 2x \end{bmatrix}$$

写像元の基底：$\boldsymbol{a_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

写像先の基底：$\boldsymbol{b_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

問題 2015BL-2-4

$\mathbb{R}^3$での線形変換fの，基底$\{\boldsymbol{a_i}\}$，$\{\boldsymbol{b_i}\}$に関する表現行列を求めよ．導出過程で基底表現式を明記すること．（前問よりさらに簡単）

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ z \end{bmatrix}$$

写像元の基底：$\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ （$\mathbb{R}^3$での基本ベクトルによる標準基底）

写像先の基底：$\boldsymbol{b_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

問題 2015BL-2-5

あるとき，前問とほぼ同じ状況に出くわした．写像元，写像先の基底は同じで，写像の形だけが下記のように$g(x)$となっていて少し違っていた．せっかく学習していたので，前問と同じように基底表現式を用意し，表現行列を求めてみた．

$$g\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2 \\ 2y \\ z \end{bmatrix}$$

写像元の基底：$\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ （$\mathbb{R}^3$での基本ベクトルによる標準基底）

写像先の基底：$\boldsymbol{b_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{b_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

得られた表現行列で試しに座標ベクトルの写像を計算してみたら，なぜか結果が全然合わなかった．

上記の手順の何がまずかったのか指摘せよ．指摘に当たっては，教科書の定義定理を利用し，その記載場所も示すこと．

ヒント：(x, y, z)にいくつか具体的な値を入れてみるといいかもしれない．さらにまだわからなければ，写像先の基底も標準基底にしたときの表現行列で考えると見えてくるかもしれない．

以上