2015 年度線形代数 B（後クラス） 演習 No.1（線形写像）ver.c

問題 2015BL-1-1

線形空間の定義を暗記し，その後，教科書を見ずに線形空間の定義を書け．教科書を閉じて 30 分以上経過してから書くこと．内容が合致していれば表現は異なっていてもよい．（教科書 P1-2）

問題 2015BL-1-2

線形写像の定義を暗記し，その後，教科書を見ずに線形写像の定義を書け．教科書を閉じて 30 分以上経過してから書くこと．内容が合致していれば表現は異なっていてもよい．（教科書 P17-18）

問題 2015BL-1-3

教科書 P90 の問題 4-1 の 1. と同様に，$\boldsymbol{R}^3$から$\boldsymbol{R}^2$への線形写像fの表現行列を，下記の基底の組に関して求めよ．ただし，導出過程において基底表現式を省略せずに表記すること．

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - 2y + z \\ x + 3y - 2z \end{bmatrix}$$

写像元の線形空間の基底：$\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$（$\boldsymbol{R}^3$での基本ベクトルによる標準基底）

写像先の線形空間の基底：$\boldsymbol{e_1}', \boldsymbol{e_2}'$（$\boldsymbol{R}^2$での基本ベクトルによる標準基底）

問題 2015BL-1-4

教科書 P90 の問題 4-1 の 2. と同様に，$\boldsymbol{R}^3$から$\boldsymbol{R}^2$への線形写像fの表現行列を，下記の基底の組に関して求めよ．ただし，導出過程において基底表現式を省略せずに表記すること．

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x - 2y + z \\ x + 3y - 2z \end{bmatrix}$$

写像元の線形空間の基底：$\boldsymbol{a_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{a_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

写像先の線形空間の基底：$\boldsymbol{b_1}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{b_2}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

問題 2015BL-1-5

$\boldsymbol{R^2}$から$\boldsymbol{R^3}$への線形写像fの表現行列を，下記の基底の組に関して求めよ．ただし，導出過程において基底表現式を省略せずに表記すること．

$$f\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x+y\\x\\3y\end{bmatrix}$$

写像元の線形空間の基底：$\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$（$\boldsymbol{R^2}$での基本ベクトルによる標準基底）

写像先の線形空間の基底：$\boldsymbol{e_1}', \boldsymbol{e_2}', \boldsymbol{e_3}'$（$\boldsymbol{R^3}$での基本ベクトルによる標準基底）

問題 2015BL-1-6

$\boldsymbol{R^2}$から$\boldsymbol{R^3}$への線形写像fの表現行列を，下記の基底の組に関して求めよ．ただし，導出過程において基底表現式を省略せずに表記すること．

$$f\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2x+y\\x\\3y\end{bmatrix}$$

写像元の線形空間の基底：$\boldsymbol{a_1}=\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{a_2}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

写像先の線形空間の基底：$\boldsymbol{b_1}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{b_2}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}, \boldsymbol{b_3}=\begin{bmatrix}0\\0\\-1\end{bmatrix}$

問題 2015BL-1-7

n次以下の多項式 $m(x)=a_0+a_1x^1+\ a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$ 全体が作る線形空間を$\boldsymbol{P_n}$で表す．$\mathrm{m}(x)\in\boldsymbol{P_n}$の導関数を$m'(x)$とし，$m(x)$を$m'(x)$に対応付ける写像を$f$とするとき，以下の問いに答えよ．

ヒント：ここでいう「元の要素を先の要素に写像すること」とは「元の要素である関数と，その微分形とを，微分という操作で対応付けること」，に相当する．このように，どのような操作も２つの要素を対応付けるものである限り，写像として考え得る．

(1) f が線形写像であることを示せ.

(2) $\boldsymbol{P_n}$の基底を$1, x^1, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}, x^n$とし，$\boldsymbol{P_{n-1}}$の基底を$1, x^1, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}$とするとき，これらの基底に対する f の表現行列 M を求めよ.

(3) (2)において $\boldsymbol{P_{n-1}}$ の基底を$1, 2x^1, 3x^2, 4x^3, \dots, nx^{n-1}$とするとき，これらの基底に対する$f$の表現行列 M′ を求めよ.

以上