

線形代数 B/III (4,5,6 クラス) 宿題その7 (ver.a)
(2015/01/06 講義対応分. 解答提出は 2015/01/13 の講義開始時)
解答は指定解答用紙を用いること。

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコ $\left(\begin{array}{ccc} & & \end{array} \right)$ と、行列式を表すときの

$\left| \begin{array}{ccc} & & \end{array} \right|$ は明確に区別して記述すること。解答用紙は裏面を使用してよいが、表面の最後に「裏面に続く」と明記すること。30 点満点。

説明や証明にあたって、定義・定理を引用する場合には、その定義・定理の内容を明記するとともに必ず教科書の頁と行数を示すこと。

問 1 : 2 次形式の標準形(2x15)

2 次の同次式 $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ について、以下の設問に答えよ。

1-1. 上記に対する 3 次の実対称係数行列 A を求めよ。

4	-1	1
-1	4	-1
1	-1	4

1-2. 行列 A に対する固有値を求める前に、この時点で固有値が持つであろう性質を述べよ。その根拠を教科書のページ数とその文章で示せ。

実数。P115 の定理

1-3. 行列 A に対する固有値を求めよ。(ヒント : 単根と重根になる)

3 (重根) , 6 (単根)

1-4. 各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。

3	3	6
1	1	1
0	1	1
-1	0	-2

$c_1 p_1 + c_2 p_2, c_3 p_3$ 。定数倍がついていること。(c_1, c_2, c_3 は零でない実数)

1-5. 行列 A は対角化可能である。その理由と、その根拠となる教科書のページ数と文章を示せ。

実対称行列なので P117 の定理より可能。

ないしは 1-4. から線形独立な 3 本のベクトルが取れることから、P110 の定理より可能。

1-6. 行列 A を対角化した行列を B とする。 A と B との間に見られるべき関係を述べよ。そ

の根拠となる教科書のページ数と文章も示せ。

相似。P109 定理。

1-7. 実対称行列 A を対角化するとき用意する行列を P とすると、 $B=P^{-1}AP$ である。この P に備わるべき性質を述べよ。その根拠となる教科書のページ数と文章も示せ。

直交行列 P117 定理。

正則（実数空間の基底を選ぶことで構成）P109「対角化」でも部分点。（直交すなわち正則）

1-8. 直交行列 P を求めよ。

固有ベクトルを求め、直交正規化すること。 $\lambda=3$ のほうはグラムシュミット法を用いているか、2本が直交することを明示していること。

3	3	6
1	1	1
0	1	1
-1	0	-2
1.414214	1.414214	2.44949
gram-schmidt		
0.707107	0.408248	-0.57735
0	0.816497	0.57735
-0.70711	0.408248	-0.57735

手計算の回答であろうから、平方根などそのまま可。

1-9. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ とする。 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ として、 ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ に代入し、 \mathbf{y} に関する二次式を計算によって求めよ。

$$3y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2$$

1-10. 求めた P は \mathbf{y} から \mathbf{x} への変換時に右手系を維持するか？根拠とともに説明せよ。

Rank(P)が整数なら右手系維持。P118 ないし P152。

1-11. $Q(y_1, y_2, y_3) = 1$ を満たす軌跡を、3 次元的に図示せよ。特に各軸との交点の座標は明示すること。

楕円体、 $(\pm\sqrt{3}, 0, 0), (0, \pm\sqrt{3}, 0), (0, 0, \pm\sqrt{6})$ で各軸と交わる。座標系が右手系になっていること。（左手系の P であれば左手系）

1-12. B の固有値を求めよ。計算しないで求める場合はその根拠を述べ、該当する教科書のページ数と文章を示せ。

3,3,6. 相似の性質 P109 より。

1-13. B の固有値に対する固有ベクトルを求めよ。

$(c_1, 0, 0), (0, c_2, 0), (0, 0, c_3)$ ただし c_1, c_2, c_3 は零でない実数。

1-14. 上記 1-13. の固有ベクトルは、1-11. の図においてどこに相当するか。

楕円体の各対称（回転）軸。

1-15. 上記 1-14 の知見をもとに、 $Q(x_1, x_2, x_3) = 1$ を満たす軌跡を、3 次元的に図示せよ。
 P の固有ベクトルが楕円体の各回転軸に一致するように描いてあれば OK。

以上