

線形代数 B/III (4,5,6 クラス) 宿題その 7 (ver.a)  
(2015/01/06 講義対応分. 解答提出は 2015/01/13 の講義開始時)

解答は指定解答用紙を用いること。

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコ  $\left( \begin{array}{ccc} & & \end{array} \right)$  と、行列式を表すときの

$\left| \begin{array}{ccc} & & \end{array} \right|$  は明確に区別して記述すること。解答用紙は裏面を使用してよいが、表面の最後に「裏面に続く」と明記すること。30 点満点。

説明や照明にあたって、定義・定理を引用する場合には、その定義・定理の内容を明記するとともに必ず教科書の頁と行数を示すこと。

問 1 : 2 次形式の標準形(2x15)

2 次の同次式  $Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$  について、以下の設問に答えよ。

- 1-1. 上記に対する 3 次の実対称係数行列  $A$  を求めよ。
- 1-2. 行列  $A$  に対する固有値を求める前に、この時点で固有値が持つであろう性質を述べよ。その根拠を教科書のページ数とその文章で示せ。
- 1-3. 行列  $A$  に対する固有値を求めよ。(ヒント : 単根と重根になる)
- 1-4. 各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ。
- 1-5. 行列  $A$  は対角化可能である。その理由と、その根拠となる教科書のページ数と文章を示せ。
- 1-6. 行列  $A$  を対角化した行列を  $B$  とする。 $A$  と  $B$  との間に見られるべき関係を述べよ。その根拠となる教科書のページ数と文章も示せ。
- 1-7. 実対称行列  $A$  を対角化するときに用意する行列を  $P$  とすると、 $B=P^{-1}AP$  である。この  $P$  に備わるべき性質を述べよ。その根拠となる教科書のページ数と文章も示せ。
- 1-8. 直交行列  $P$  を求めよ。
- 1-9.  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$  とする。 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$  として、 ${}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$  に代入し、 $\mathbf{y}$  に関する二次式を計算によって求めよ。
- 1-10. 求めた  $P$  は  $\mathbf{y}$  から  $\mathbf{x}$  への変換時に右手系を維持するか? 根拠とともに説明せよ。
- 1-11.  $Q(y_1, y_2, y_3) = 1$  を満たす軌跡を、3 次元的に図示せよ。特に各軸との交点の座標は明示すること。
- 1-12.  $B$  の固有値を求めよ。計算しないで求める場合はその根拠を述べ、該当する教科書のページ数と文章を示せ。

1-13.  $B$  の固有値に対する固有ベクトルを求めよ。

1-14. 上記 1-13. の固有ベクトルは、1-11. の図においてどこに相当するか。

1-15. 上記 1-14 の知見をもとに、 $Q(x_1, x_2, x_3) = 1$  を満たす軌跡を、3 次元的に図示せよ。

以上