

線形代数 B/III (4,5,6 クラス) 宿題その 6 (ver.a)
(2014/12/16 講義対応分. 解答提出は 2015/1/6 の講義開始時)
解答は指定解答用紙を用いること。

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコ $\left(\begin{array}{ccc} & & \end{array} \right)$ と、行列式を表すときの

$\left| \begin{array}{ccc} & & \end{array} \right|$ は明確に区別して記述すること。解答用紙は裏面を使用してよいが、表面の最後に「裏面に続く」と明記すること。30 点満点。

説明や照明にあたって、定義・定理を引用する場合には、その定義・定理の内容を明記するとともに必ず教科書の頁と行数を示すこと。

問 1 : 直交行列の性質 (1x3)

行列 A が直交行列であるとする。

- 1-1. 直交行列の性質を 4 つ以上示せ。
- 1-2. あるベクトル x があるとき、 Ax のノルムは x 自身と同じであることを示せ。
- 1-3. 直交変換（およびその表現である直交行列）はその変換前後において、ベクトル間の角度を保存するか？その根拠を教科書のページ番号を示し、引用して記述せよ。

問 2 : 2 重根の固有値をもつ対象行列の対角化 (1x12)

今、行列 A を次のように取る。

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

- 2-1. この行列の固有値を求めよ。単根を λ_1 、2 重根を λ_2 とする。
- 2-2. λ_1 に対応する固有空間の次元数を求め、その固有ベクトル表現を求めよ。
- 2-3. λ_2 に対応する固有空間の次元数を求め、その固有ベクトル表現を求めよ。
- 2-4. 上記 2-3. の固有ベクトル表現の中から、線形独立な 2 つのベクトルを選び出せ。これらを p_2, p_3 とする。
- 2-5. 上記 2-2. からベクトルを一つ選び、これを p_1 とする。 p_1, p_2, p_3 を用いて P と P^{-1} を求め、そこから計算により A を対角化せよ。
- 2-6. p_1 を正規化せよ。これを q_1 とする。
- 2-7. p_2, p_3 をグラムシュミット法により直交正規化せよ。これらを q_2, q_3 とする。
- 2-8. 念のため、 q_2, q_3 が λ_2 の固有ベクトルであることを確認しておきたい。どうすればよいか？またそれを実行して確認せよ。
- 2-9. 正方行列 $Q = (q_1, q_2, q_3)$ を用意すると、 $Q^{-1}Q = E$ となることを確認せよ。

2-10. 上記 2-9.を保証してくれる定理は何か？教科書のページ番号を示したうえで、その定理の内容を記載せよ。

2-11. ${}^t\text{QAQ}$ の結果を予想せよ。その根拠となった教科書中の頁番号と記述を示せ。

2-12.実際に ${}^t\text{QAQ}$ が 2-11 の予想の通りになることを計算により確認せよ。

問 3：エルミート行列の対角化 (1x15)

実対称行列を複素行列に拡張したものがエルミート行列である。

まず、ある複素行列 A に対して、共役転置行列 *A を定義する(随伴行列とも呼ぶ)。これは A の各要素をその共役の複素数に置き換えた後、転置したものである。例として、 i を虚数単位、 a から h を実数とすれば、次のようになる。

$$A = \begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ e+fi & g+hi \end{bmatrix} \text{ ならば } {}^*A = \begin{bmatrix} a-bi & e-di \\ c-fi & g-hi \end{bmatrix}$$

定義：エルミート行列 $\Leftrightarrow {}^*A=A$

また、実直交行列を複素行列に拡張したものをユニタリ行列という。

定義：ユニタリ行列 $\Leftrightarrow {}^*AA=A{}^*A=E$

今、3次正方複素行列 B が次のように与えられたとする。

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3i & i \\ -3i & 3 & 0 \\ -i & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3-1. B がエルミート行列であることを示せ。

3-2. 以下で実際に固有値と固有ベクトルを求める（いわゆる固有値問題）を実際に解いてもらうが、その前に、この時点で、どのような固有値が幾つ求められるはずか述べよ。その根拠を示している教科書のページ番号を示し、該当部を引用せよ。ただし授業でまだしてない範囲を引用する必要はない。

3-3. 上記 3-2.と同じく、線形独立な固有ベクトルがどのように得られるか述べよ。その根拠を教科書のページ番号を示し、該当部を引用せよ。

3-4. 正方複素行列の固有値を求める方法を教科書のページ番号で示した上で、 B の固有値を全て求めよ。(固有値は全て実数となるように調整済)

3-5. B の線形独立な固有ベクトルを全て挙げよ。

3-6.上記 3-5.の固有ベクトルを正規化したい。まず正規化の定義を厳密に（教科書に記載の通り）述べよ。

3-7. 正規化の定義式に出てくるノルムとは何か。その定義を厳密に（教科書に記載の通り）述べよ。

3-8. ここでは（ここに限らず多くの場合暗黙のうちに）内積の定義として教科書 P91 の例 1 に示したものを採用する。さて、厳密には、なぜここでこのような断りを入れなければならない

らないのか？理由を説明せよ。

3-9. 準備と理解が済んだところで、3-5.の固有ベクトルを全て正規化せよ。ただし、正規化されたベクトルは第一要素の実数部が正となるように求めること。もし第一要素が0である場合は、第二要素を同様にすること。

3-10. 正規化した固有ベクトルを列ベクトルとして並べた行列を P とする。 P を求めよ。ただし、対応する固有値が昇順（左から小さいもの順）になるように並べること。

3-11. 上記 3-10.の P がユニタリ行列であることを計算によって検証したいので、まず P^*P が E になることを計算によって確認せよ。

3-12. 続いて、 PP^* が E になることを計算によって確認することで証明終わり、としたいところではあるが、1-11.を行ってみておそらく計算は大変だったことであろう。そこで、 P^*P が E であることを計算によって求める代わりに、 $P^*P = E$ から $PP^* = E$ を証明せよ。どうしても証明ができなければ計算で確認してもよい。

3-13. P がユニタリ行列であるといえると、実用上どのようないいことがあるか説明せよ。

3-14. PBP^* の結果を予想した上で、計算によりそうなることを確認せよ。

3-15. エルミート行列が実数での対称行列、ユニタリ行列が実数での直交行列に対応することを覚えるためのごろ合わせを何か提案せよ。