**線形代数B/III （4,5,6クラス）宿題その６（ver.a）**

**(2014/12/16講義対応分. 解答提出は2015/1/6の講義開始時)**

**解答は指定解答用紙を用いること。**

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコと、行列式を表すときのは明確に区別して記述すること。解答用紙は裏面を使用してよいが、表面の最後に「裏面に続く」と明記すること。30点満点。

説明や照明にあたって、定義・定理を引用する場合には、その定義・定理の内容を明記するとともに必ず教科書の頁と行数を示すこと。

問1：直交行列の性質 (1x3)

行列Aが直交行列であるとする。

1-1. 直交行列の性質を４つ以上示せ。

【略解】P97 tLL=Eおよび(i)-(iii)。

1-2. あるベクトルxがあるとき、Axのノルムはx自身と同じであることを示せ。

【略解】P98定理(i)。もとの変換の定義がそうなっているので、その表現行列も当然それに従う。

1-3. 直交変換（およびその表現である直交行列）はその変換前後において、ベクトル間の角度を保存するか？その根拠を教科書のページ番号を示し、引用して記述せよ。

【略解】P99註。

問２：２重根の固有値をもつ対象行列の対角化　(1x12)

今、行列Aを次のように取る。

2-1. この行列の固有値を求めよ。単根をλ1、２重根をλ2とする。

【略解】　λ1=-2,λ2=-5

2-2. λ1に対応する固有空間の次元数を求め、その固有ベクトル表現を求めよ。

【略解】連立方程式が２本なので１次元。c1(1,1,1)ただしc1は0でない任意の複素数。

2-3. λ2に対応する固有空間の次元数を求め、その固有ベクトル表現を求めよ。

【略解】連立方程式が１本(x+y+z=0)なので２次元。例えばc2(1,-1,0)+c3(1,0,-1)。

2-4. 上記2-3.の固有ベクトル表現の中から、線形独立な２つのベクトルを選び出せ。これらを**p**2, **p**3とする。

【略解】p2=(1,-1,0), p3=(1,0,-1)

2-5. 上記 2-2.からベクトルを一つ選び、これを**p**1とする。**p**1 , **p**2, **p**3を用いてPとP-1を求め、そこから計算によりAを対角化せよ。

【略解】p1=(1,1,1)とすると

2-6. **p**1を正規化せよ。これを**q**1とする。

【略解】q1=1/r(3) (1,1,1)

2-7. **p**2, **p**3をグラムシュミット法により直交正規化せよ。これらを**q**2, **q**3とする。

【略解】q2=1/r(2) (1,-1,0), q3= (1/r(6), 1/r(6), -r(2)/r(3))

2-8. 念のため、**q**2, **q**3がλ2の固有ベクトルであることを確認しておきたい。どうすればよいか？またそれを実行して確認せよ。

【略解】 A q2=λ2 q2 を確認。q3も同じ。

2-9. 正方行列Q=( **q**1, **q**2, **q**3) を用意すると、tQQ=Eとなることを確認せよ。

【略解】 省略。

2-10. 上記2-9.を保証してくれる定理は何か？教科書のページ番号を示したうえで、その定理の内容を記載せよ。

【略解】P117.実対称行列の対角化の定理中にある「適当な直交行列P」およびP97定理(ii)。

2-11. tQAQの結果を予想せよ。その根拠となった教科書中の頁番号と記述を示せ。

【略解】P117の定理全体。

2-12.実際にtQAQが2-11の予想の通りになることを計算により確認せよ。

【略解】

tQAQ=

問３：エルミート行列の対角化　(1x15)

実対称行列を複素行列に拡張したものがエルミート行列である。

まず、ある複素行列Aに対して、共役転置行列 \*A を定義する(随伴行列とも呼ぶ)。これはAの各要素をその共役の複素数に置き換えた後、転置したものである。例として、iを虚数単位、aからhを実数とすれば、次のようになる。

ならば

定義：エルミート行列⇔ \*A=A

また、実直交行列を複素行列に拡張したものをユニタリ行列という。

定義：ユニタリ行列⇔ \*A A = A \*A = E

今、３次正方複素行列Bが次のように与えられたとする。

3-1. Bがエルミート行列であることを示せ。

【略解】共役の複素数に置き換えて転置するとBに一致する。

3-2. 以下で実際に固有値と固有ベクトルを求める（いわゆる固有値問題）を実際に解いてもらうが、その前に、この時点で、どのような固有値が幾つ求められるはずか述べよ。その根拠を示している教科書のページ番号を示し、該当部を引用せよ。ただし授業でまだしてない範囲を引用する必要はない。

【略解】複素数の固有値が重根を含んで3つ得られる。根拠はP104の中ほど「固有方程式‥はλのn次方程式で‥(P132)。」。P132(厳密にはP133の系)のほうまでは引用しなくてよい。

3-3. 上記3-2.と同じく、線形独立な固有ベクトルがどのように得られるか述べよ。その根拠を教科書のページ番号を示し、該当部を引用せよ。

【略解】少なくとも異なる固有値の個数までは線形独立な複素ベクトルが(確実に)得られる。根拠はP103「固有ベクトルxとは、幾何的に考えれば‥」の３行。P104の例1の直前の「さて、各固有値λiに対しては‥」でも可。

3-4. 正方複素行列の固有値を求める方法を教科書のページ番号で示した上で、Bの固有値を全て求めよ。（固有値は全て実数となるように調整済）

【略解】P104。固有値は-2,3,5。

3-5. Bの線形独立な固有ベクトルを全て挙げよ。

【略解】c1(1,(3/5)i, (1/5)i), c2(0, 1, -3), c3(1, -(3/2)i, -(1/2)i) ただしc1,c2,c3は**0でない**任意の**複素数**。転置してあるほうがよいがどうでもよい。計算過程は別紙LecNote７枚目の裏。

3-6.上記3-5.の固有ベクトルを正規化したい。まず正規化の定義を厳密に（教科書に記載の通り）述べよ。

【略解】P94, 「正規化」から始まる３行。

3-7. 正規化の定義式に出てくるノルムとは何か。その定義を厳密に（教科書に記載の通り）述べよ。

【略解】|**a**|のこと。P91に定義がある。

3-8. ここでは（ここに限らず多くの場合暗黙のうちに）内積の定義として教科書P91の例1に示したものを採用する。さて、厳密には、なぜここでこのような断りを入れなければならないのか？理由を説明せよ。

【略解】P92の註１。

3-9. 準備と理解が済んだところで、3-5.の固有ベクトルを全て正規化せよ。ただし、正規化されたベクトルは第一要素の実数部が正となるように求めること。もし第一要素が０である場合は、第二要素を同様にすること。

【略解】ルートkをr(k)で示す。

λ=-2 → **p**1= (r(5)/r(7), 3/r(5)/r(7), 1/r(5)/r(7))

λ=3 → **p**2=(0, 1/r(2)/r(5), -3/r(2)/r(5))

λ=5 → **p**3=(r(2)/r(7), 3i/r(2)/r(7), -i/r(2)/r(7))

3-10. 正規化した固有ベクトルを列ベクトルとして並べた行列をPとする。Pを求めよ。ただし、対応する固有値が昇順（左から小さいもの順）になるように並べること。

【略解】**p**1から順に並べる。縦に（列に）並べてないとＮＧ。

3-11. 上記3-10.のPがユニタリ行列であることを計算によって検証したいので、まずP \*P がEになることを計算によって確認せよ。

【略解】\*P 省略。

3-12. 続いて、P P \* がEになることを計算によって確認することで証明終わり、としたいところではあるが、1-11.を行ってみておそらく計算は大変だったことであろう。そこで、P P \*がEであることを計算によって求める代わりに、P \*P = Eから\*P P = Eを証明せよ。どうしても証明ができなければ計算で確認してもよい。

【略解】\*P P = \*P EP = \*P(P \*P) P = \*PP \*PP = (\*PP)( \*PP) = (\*PP)2

ここで\*P P =Mと表記すると P=P2であり、M(M-E)=Oとなり、MはEかOとなる。\*P P =Oとしてしまうと、Pは線形独立な列ベクトルの集合からなっているのでその逆行列が存在してそのP-1を右から掛けて\*P=Oとなり、これはありえない（もとのPが正則のとき、随伴行列の定義から明らかに\*P≠O）。よってM=E。(解法はどのようなものでも可。ただし、「wikipediaや～にそういう性質だと書いてあったから」というのはＮＧ)

3-13. Pがユニタリ行列であるといえると、実用上どのようないいことがあるか説明せよ。

【略解】P-1=\*Pなので逆行列を求めなくともすぐにP-1が求まる。

3-14. \*PBPの結果を予想した上で、計算によりそうなることを確認せよ。

【略解】\*PBP=。計算は省略。

3-15. エルミート行列が実数での対称行列、ユニタリ行列が実数での直交行列に対応することを覚えるためのごろ合わせを何か提案せよ。

【略解】なんでも書いてあれば可。