

線形代数 B/III (4,5,6 クラス) 宿題その 3 (ver.c)
(2014/11/25 講義対応分. 解答提出は 2014/12/2 の講義開始時)
解答は指定解答用紙を用いること。

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコ $\left(\quad \right)$ と、行列式を表すときの

$\begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix}$ は明確に区別して記述すること。解答用紙は裏面を使用してよいが、表面の最後に「裏面に続く」と明記すること。30 点満点。

説明や証明にあたって、定義・定理を引用する場合には、その定義・定理の内容を明記するとともに必ず教科書の頁と行数を示すこと。

問 1 : 固有値問題 (2x6)

ある複素 n 次正方行列 A が与えられたとする。固有値には複素数を認めるものとする。
与えられた行列に対して固有値と対応する固有ベクトルを求めることを固有値問題と呼ぶ。

- 1-1. (重解を含めて) 固有値が n 個未満しか見つからない状況を説明せよ。
- 1-2. どんな A に対しても、 n 本の固有ベクトルを用意することは常に可能である。その方法を示すと同時に、その場合に見られる制約を述べよ。
- 1-3. n 個の固有値を求めるために、 A が正則であることは必要か？根拠を示して説明せよ。
- 1-4. A が正則であれば、 n 個の固有値を求めるために十分か？根拠を示して説明せよ。
- 1-5. n 本の線形独立な固有ベクトルを求めるために、 A が正則であることは必要か？根拠を示して説明せよ。
- 1-6. A が正則であれば、 n 本の線形独立な固有ベクトルを求めるために十分か？根拠を示して説明せよ。

問 2 : 対角化 (2x2)

ある複素 n 次正方行列 A が与えられたとする。

- 2-1. A が対角化できる実用十分条件を示せ。

2-2. A が対角化できるかどうかを判定するアルゴリズムを、条件分岐 2 つを含めて書き下せ。

問 3 : べき等行列 (冪等行列) (1x4)

複素 n 次正方行列 A が、 $A^2=A$ を満たすとする。このような行列をべき等行列という。

3-1. べき等行列の固有値は 0 か 1 しかありえないことを示せ。

3-2. 下記の行列 K がべき等行列であることを計算によって確認せよ。

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3-3. K の固有値と固有ベクトルを全て求めよ。

3-4. K が対角化可能であることを確認してから、対角行列を求めよ。

問 4 : べき零行列 (冪零行列) (1x3)

複素 n 次正方行列 A が、ある自然数 m について、 $A^m = O$ を満たすとする。このような行列をべき零行列という。

4-1. べき零行列の固有値を求めよ。

4-2. 下記の行列 L が 3 乗でのべき零行列であることを計算によって確認せよ。

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4-3. L の固有値と固有ベクトルを全て求めよ。

問 5 : 固有値の重解 (2)

複素 2 次正方行列のなかで固有値が重根である行列を考える。この中で対角化可能な行列は、 kE のみであることを示せ。ただし k は任意のスカラー量、 E は 2 次の単位行列とする。

問 6 : 定理の定義 (1)

上記の 3-1, 4-1 で得られた知識を定理と呼んでもよいか？その適格性を議論せよ。

問 7 : 対角化の計算 (1x4)

以下の行列 F, G が与えられているとする。下記は計算過程も示すこと。

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

7-1. 行列 F について、対角化可能かどうかを示せ。

7-2. 行列 F に対応する対角行列、それが無理なら三角行列を求めよ。ただし対角要素は 1 行目から 3 行目に向かって正順（だんだん大きくなる）ようにすること。

7-3. 行列 G について、対角化可能かどうかを示せ。

7-4. 行列 G に対応する対角行列、それが無理なら三角行列を求めよ。ただし対角要素は 1 行目から 3 行目に向かって正順（だんだん大きくなる）ようにすること。