**線形代数B/III 宿題その１（改編c）**

**(2014/11/11講義対応分. 解答提出は2014/11/18の講義開始時)**

**解答は指定解答用紙を用いること。**

注意

解答にあたっては、行列を表すときのカッコと、行列式を表すときのは明確に区別して記述すること。

（本解答例の他に、excelによる計算例あり）

問１：固有値と固有ベクトルの概念の復習

今、行列とベクトルを次のように定義する。

, , ,

1. はおのおの, , の関係を満足することを確認せよ。また、 , , の値を求めよ。

【略解】



2. 下の**y** を の形に表すことを考える。この時の の値を一組示せ。導出過程も示すこと。用いた導出原理の教科書上での出典を示せ（ページ番号、行数、「～の定理」など）。

【略解】



3. 単純に（ととで3x3と3x1の演算をして） を求めよ。導出過程を示すこと。

【略解】



4. 上の 1. 2.で求めた関係を用いて を求めよ。その過程において、行列演算をせず（ととで3x3と3x1の演算をしない）、 と、 , , を用いること。導出過程を示すこと。結果が3.と一致するかどうか確かめよ。

【略解】



問２： 固有値と固有ベクトルの確認

1. 問１で用いた行列 に対し、 の固有方程式を示せ。

【略解】

|A-λE|=0 からサラスの展開を経て (λ-2)(λ-3)(λ+2)=0

2. の固有値を全て求めよ。必ず導出過程を示すこと。

【略解】

因数分解結果から 2,3,-2。

3. の固有値全てについて、対応する固有ベクトルを示せ。必ず導出過程を示すこと。

【略解】



の左端を利用した (A-λE) t(x,y,z) = O から

λ=2: 1行目からy=0 ⇒ 2行目に代入して x=0 ⇒ zを残る自由度として c1t(0,0,1)

λ=3: 1,2行目からx=2y, 3行目からx+2y-z=0 ⇒ x=2y, z=4y ⇒ yを残る自由度としてc2 t(2,1,4)

λ=-2: 1,2行目から2x+y=0, 3行目からx+2y+4z=0 ⇒ y=-2x, x+2(-2x)+4z=0 ⇒ z=3x/4 ⇒ xを残る自由度として c3t(1,-2,3/4)

ただし定数は0でない任意の複素数。

4. 問1で用いた、 , , が の固有値であることを確認せよ。

【略解】

2-2の解が1-1の解に一致していることを確認。

5. 問１で用いた が各自で求めた固有ベクトルと同じか、そのスカラー倍になっていることを確認せよ。

【略解】

λ=2: c1=-1で問１と同じ。

λ=3: c2=1で問1と同じ。

λ=-2: c3=-4で問1と同じ。

問３：固有値と固有ベクトルの計算

, , , ,

1. に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトルを導出過程も含めて示せ。

【略解】

|A-λE|=0から(λ-1)(λ-2)(λ+1)=0。そこから(A-λE) t(x,y,z)=O として固有ベクトルを求める。固有ベクトルの定数倍項は0でない複素数。



2. に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトルを導出過程も含めて示せ。

【略解】

|A-λE|=0から(λ-3)(λ-3)(λ-6)=0。

単解： (A-λE) t(x,y,z)=O として固有ベクトルを求める。固有ベクトルの定数倍項は0でない複素数。



重解： (A-λE) t(x,y,z)=O から



となるので、x+y+z=0のみが得られる。x,yを自由変数に取るとz=-x-y。

ゆえに固有ベクトルは(xをc1, yをc2に見立てて) t(x,y,-x-y) ⇒ c1(1,0,-1) + c2(0,1,-1).ただしc1, c2は0でない複素数。

3. に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトルを導出過程も含めて示せ。

【略解】

|A-λE|=0から(λ-1)(λ-1)(λ-1)=0。

固有値は1の三重解となる。



任意のx,y,zに対して(A-λE) t(x,y,z)=Oが成立する。自由変数をx,y,zに取り、それをc1, c2, c3に見立てると、(x,y,z) ⇒ c1(1,0,0) + c2(0,1,0) + c3(0,0,1)。

4. に対し、固有多項式、固有値を導出過程も含めて示せ。

【略解】



ここでm=1-λとすると、|A-λE|の行列式は次のように展開できる。

-2mmaa+mmmm+aaaa-2aabb-2mmbb+bbbb=0

さらにM=m2とすると

M2-2(a2+b2)M+(a2-b2)2=0

{M-(a+b)2}{M-(a-b)2}=0

ゆえに

M=m2=(a+b)2とするとm=±(a+b)つまり1-λ=±(a+b)からλ＝1±(a+b)

M=m2=(a-b)2とするとm=±(a-b)つまり1-λ=±(a-b)からλ＝1±(a-b)

固有値はこの４つ。

5. に対し、固有多項式、固有値、固有ベクトルを導出過程も含めて示せ。

【略解】



|A-λE|=(1-λ)(5-λ)-(-2)4=λ2-6λ+13=0

λ=3±2i

固有ベクトルはそれぞれ下記の左端。



-------------------------------------------

問４：基底変換と座標変換

について、ある基底を考える（ただし は基本ベクトル(教科書P12)とする。）

, ,

と、さらに別の基底として

, ,

を考える。

1. 基底 を基底 に変換する基底変換行列 を求めよ。

【略解】下記のPに相当。解法の一例はP89例2。



2. ある位置ベクトルを考えるとき、そのベクトルの基底 による座標を

とし、基底 による座標を とする。この二つの座標間の関係を、1.の結果を手掛かりにして示せ。その根拠となる教科書の該当部を明記せよ（ページ、行数、「～の定理」など）。

【略解】

P85-P88の間の該当する説明部分を指摘してあれば可。（基底変換に相当するがそれ以前のところでも説明が一致していれば可）



例えば、基底 での座標(12,34,5)は基底変換行列Pにより基底 では(51,-46,85)となることがわかる。



3. 基底 による線形空間から基底 による線形空間への写像 を考える。ただし

とする。この についての表現行列 を求めよ。導出過程も示せ。導出方法を示している教科書の該当部を明記せよ（ページ、行数、「～の定理」など）。

【略解】

下記のMを参照。

